Manfred BOROVCNIK, Klagenfurt

Am Schnittpunkt von empirischer Forschung und Unterricht in elementarer Wahrscheinlichkeit

In der empirischen Forschung zum Verständnis von Wahrscheinlichkeit werden Items verwendet, die als eindeutig lösbar unterstellt werden. Aus dem Lösungsverhalten und den Antworten in Nachfolge-Interviews versucht man zu interpretieren, inwieweit Probanden über geeignete Auffassungen von Wahrscheinlichkeit verfügen.

Solche Aufgaben kann man auch im Unterricht der elementaren Wahrscheinlichkeit einsetzen. Durch Drehen und Wenden der Aufgaben und vielfältiger Lösungen dazu kann man zeigen, dass die direkte Deutung der Antworten – auch im scheinbar „vernünftigen“ Gespräch so leicht nicht ist. Dadurch wird klar, dass vordergründig falsche Ansichten doch einen „guten“ Kern haben. Insgesamt entsteht damit ein vielfältiges Bild von Wahrscheinlichkeit, das Verständnis ermöglichen kann.

1. Der Stellenwert von Intuitionen für die Akzeptanz des Gelernten

Ursprünge der Wahrscheinlichkeit in der Antike gehen zurück in mythische Bereiche. Wollte man den Willen der Gottheiten erkunden, so war der Zufall immer im Spiel. Berühmt ist das Orakel von Delphi. Die Priesterin Pythia nimmt ein kultisches Bad und begibt sich dann, begleitet von zwei Priestern, in den Apollo-Tempel, wo sie sich über einer Erdspalte, aus der süßliche Dämpfe emporsteigen, in Trance bringt. Dann wirft sie 4-5 Astragali (Knöchelchen aus dem Sprunggelenk von Schafen) und sagt die Zukunft voraus. Ärmere Leute konnten nur Ja-nein-Fragen stellen. Dann griff die Pythia in einen Behälter mit weißen (ja) und schwarzen (nein) Bohnen (vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Orakel_von_Delphi).

Abb. 1a: Antiker Umgang mit Zufall

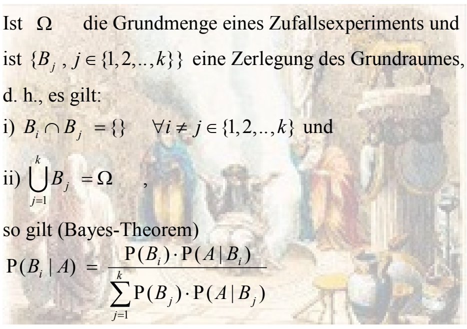

Abb. 1b: Moderner Umgang mit Zufall

Zufall wurde vornehmlich in weiblichen Gottheiten personifiziert. So teilte Tyche aus ihrem Füllhorn je nach Laune Wohltaten oder Prüfungen aus. Waren heikle Entscheidungen zu treffen, so bediente man sich des Zufalls.

Glücksspiel wurde derart überzogen, dass man „nichts“ dabei fand, sich selbst als Einsatz zu setzen, wenn man alles Geld schon verspielt hatte – sollte man dann verlieren, so akzeptierte man das als Gottesurteil. Zufall spielte aber auch in der Justiz eine Rolle, so ist die römische Justitia als Göttin der Gerechtigkeit dargestellt, die blind – ohne Ansehen der Person ein gerechtes Urteil fällt. Und auch hier wird der Zufall assoziiert. Noch heute wird eine Entscheidung als „gerecht“ empfunden, wenn man – blind – in eine Urne hineingreift und …

Zufall und Kausalität sind in den Wissenschaften vordergründig konfligierende Ordnungsmuster. Wenn etwas Zufall ist, dann kann keine kausale Ordnung dahinter stecken. Der Laplacesche Dämon war der Versuch einer Lösung der Widersprüche: Nur wer die Struktur und die physikalischen, kausal verstandenen Gesetze im Hintergrund nicht kennt, ist auf Wahrscheinlichkeiten angewiesen (und mag sich damit auch ganz gut orientieren). Die moderne Physik verstrickt sich dagegen immer mehr im Zufall: alle Kausalität wird wegdefiniert durch stochastische, also zufällige Gesetze. Aber kann irgendjemand diese Gesetze auch noch verstehen? Oder noch wichtiger: akzeptieren?

Die Mathematik geht – genauso wie die Pythia der Antike – in der begrifflichen Durchdringung von Zufall „geheimnisvolle“ Wege, die selten wirklich verstanden werden. Als Beispiel sei die elementare Bayes-Formel (Abb. 1b) herangezogen. Was bedeuten diese Aussagen, ja was ist eine Wahrscheinlichkeit überhaupt? Empirisch gut belegt ist folgendes „Missverständnis“: Krankheit KK habe eine Verbreitung von 0,1%; die Diagnose eine Sicherheit von 99%, d. h., hat die Person KK, so ergibt sich mit 99% Sicherheit die Diagnose positiv. Weiters ist die Spezifität der Diagnose 2%, d. h., liegt KK nicht vor, so hat man 2% Risiko, eine positive Diagnose zu erhalten. **„Ja, dann ist eine positive Person zu 99% krank“**

Hier drängt sich ein kausales Denkmuster in den Vordergrund. Die einzig ursächlich zu verstehende Zahl ist die Wahrscheinlichkeit eines positiven Befundes, wenn KK vorliegt. Alle anderen Informationen sind so „blass“, dass sie nicht „akzeptiert“ werden. Selbst wenn jemand formal die Aufgabe richtig lösen würde, für sich privat würde er die Lösung anzweifeln und auf die oben zitierte Antwort ausweichen.

Noch stärker als der kausale Bezug ist der Zusammenhang von Zufall mit Gottesentscheidungen. Nicht nur im Falle, dass man die Begriffe schlecht verstanden hat, drängen sich diese Denkmuster in den Vordergrund. Fischbein (1987) spricht in diesem Fall von primären und sekundären Intuitionen und der Notwendigkeit, primäre Vorstellungen im Unterricht aufzugreifen und sie bewusst zu verändern, damit man sie in sekundäre Intuitionen verfeinern kann. Primäre Intuitionen sind hartnäckig, Gelerntes hat immer Nachrang. Je mehr man dies anerkennt, desto größer die Chancen, Lernende dauerhaft – im Sinne der „Wissenschaft“ – zu beeinflussen.

2. Feedback für alle Beteiligten im Lernprozess

Was bedeutet: $\boxed{\mathbf{P(Kopf)} = ½ \;\; - \;\; \mathbf{P(GAU)} = \mathbf{10^{-15}}}$? Selbst beim Münzwerfen ist so eine elementare Wahrscheinlichkeitsaussage schwierig zu interpretieren. Wenn man „verliert“, kommt immer die Frage hinzu, „warum denn ich?“ – also die Nähe zum „Gottesurteil“. Viel schwieriger wird es, wenn Wahrscheinlichkeiten sehr klein, aber die damit verbundenen Konsequenzen sehr groß sind, wie etwa bei atomaren Kernkraftwerken für den „größten anzunehmenden Unfall“. Hier kann man nur irrationale Einschätzungen erwarten. Im Unterricht bindet man Wahrscheinlichkeit ganz eng an die Deutung als relative Häufigkeit, eine solche Deutung versagt aber in diesen Zusammenhängen völlig. Hier handelt es sich um Expertenurteile, die man in qualitative Wahrscheinlichkeiten ummünzt.

Das Verständnis der elementarsten Einheit, der Wahrscheinlichkeit einer einfachen Aussage, ist mithin bereits schwierig zu interpretieren, numerische Bewertungen werden kaum akzeptiert. Es gibt vielerlei Störgrößen, die das „Bild“ bereichern. Einige davon sind sehr tief verwurzelt: Gottesurteil, Weltbild, Emotion, große Risiken sind nur einige davon.

Im Unterricht geht man den Intuitionen gerne aus dem Weg: Man führt rasch auf die „sichere“ Mathematik, auf präzisere Begriffe hin, in der Hoffnung, dass sich die schwammigen Vorstellungen später wie von selbst durch den Umgang mit den präzisen Begriffen der Mathematik klären.

Dabei werden durchaus äußerliche „Erfolge“ erreicht, Lernende lernen spielend die schwierigsten Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, aus den kompliziertesten Modellen „Eigenschaften“ abzuleiten. Aber wir machen uns was vor: Wie empirische Untersuchungen immer wieder belegen, greifen im Ernstfall Lerner auf ihre „rohen“ Strategien zurück oder interpretieren die Aufgaben oder ihre Ergebnisse nach ihren privaten Vorstellungen um. Sie lernen „how to answer if you must“ – und lösen ihre Probleme weiterhin mit ihren intuitiven Strategien (siehe Gigerenzer & Brighton, 2009).

3 Einbindung empirischer Forschung in den Anfangsunterricht

Der Autor hat wiederholt Items aus empirischer Forschung in die Unterweisung in elementarer Wahrscheinlichkeit eingebaut (siehe Borovcnik, 2003, 2009) – und zwar an der Universität. Lyso (2008) geht in ähnliche Richtung. Es kann dabei festgehalten werden, dass die Auswahl der Beispiele relativ unwesentlich ist. Es zählt, *wie* man damit umgeht.

Im Unterricht verhält man sich – im Gegensatz zur empirischen Forschung – nicht neutral. Man wird vielmehr die Interview-Situation (auch in der Gruppe) gezielt ausnützen, um die Lernenden mit weiteren Varianten zu konfrontieren, welche die von ihnen geäußerten Vorstellungen herausfordern, sodass sie ihre Grenzen kennen lernen. Wie schnell „eindeutig lösbare" Items, welche klar erschließen sollen, ob jemand einen Begriff verstanden hat, in einsichtiger Weise *mehrfach* analysiert werden können und welche „Fallen" sich daraus für eine sachgerechte Interpretation von Antworten ergeben, das kann man in Bentz & Borovcnik (1991) nachlesen.

Ein kleiner Vorgeschmack: Denken und Handeln sind zwei ganz verschiedene Herangehensweisen: Jemand kann auf der Ebene des Reflektierens zur – korrekten – Einschätzung der gleichen Wahrscheinlichkeit zweier Wahlmöglichkeiten kommen. Wenn jedoch eine Wette abzuschließen ist (Handeln), ist dieselbe Person bereit, höchst unfaire Bedingungen zu akzeptieren, damit sie auf eine bestimmte der beiden Optionen setzen kann. Klar, wenn man dann nachfragt, warum das so ist, verlässt man die Ebene einer rationalen Kommunikation und kann wirklich nicht mehr nachvollziehen, was nun wer wirklich meint. Den Anfang macht das auch im Sinne des Probanden unsinnige Verlangen des Interviewers, die getroffene Wahl zu begründen – was ja nicht geht, wenn man schon weiß, dass die beiden Möglichkeiten gleich wahrscheinlich sind.

Später verweist man auf diese Anfangserlebnisse, ohne sich unnötig aufhalten zu müssen, weil ja die Vermittlung von Techniken auf dem Plan steht.

Literatur

Borovcnik, M. (2003). *Interviews zum Wahrscheinlichkeitsverständnis als Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Klagenfurt: Unveröffentlichtes Manuskript.

Borovcnik, M. (2009). *Mehrfachanalyse von Items zum Wahrscheinlichkeitsverständnis*. Klagenfurt: Unveröffentlichtes Manuskript.

Borovcnik, M., Bentz, H. J. (1991). Empirical Research in Understanding Probability. In R. Kapadia, M. Borovcnik (Hrsg.), *Chance Encounters* (73–106). Dordrecht: Kluwer.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach.* Dordrecht: D. Reidel.

Gigerenzer, G., Brighton, H. (2009). Homo Heuristicus: Why Biased Minds Make Better Inferences. *Topics in Cognitive Science* 1, 107–143.

Lyso, K. (2008). Strengths and Limitations of Informal Conceptions in Introductory Probability Courses for Future Lower Secondary Teachers. *ICME 11, Topic Study Group 13: Research and development in the teaching and learning of probability*. http://tsg.icme11.org/tsg/show/14#prog (Datum der Einsichtnahme: 15. 3. 2009).